J. Cuntz und T. Timmermann WS 13/14

Übung zu Operatoralgebren
Blatt 3 für den 25.11.13

Aufgabe 1. *Diese Aufgabe zeigt, dass jeder treue Zustand auf einer endlich-dimensionalen C^*-Algebra ein KMS-Zustand ist, wobei der zugehörige modulare Automorphismus recht explizit beschrieben werden kann.*

Sei ϕ ein Zustand auf der C^*-Algebra $M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein positives $T \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\phi(A) = \mathrm{Tr}(AT)$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$, wobei Tr den Spurzustand auf A bezeichne.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) ϕ ist treu: $\phi(A^*A) > 0$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A \neq 0$;

ii) für jedes $A \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A \neq 0$ existiert ein $B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $\phi(BA) \neq 0$;

iii) T ist invertierbar.

Sei nun ϕ treu.

(c) Finden Sie einen Algebra-Automorphismus $\tilde{\sigma}$ von $M_n(\mathbb{C})$ mit $\phi(AB) = \phi(B\tilde{\sigma}(A))$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Wie verhält sich $\tilde{\sigma}$ zur Involution?

(d) Erraten Sie eine Ein-Parameter-Gruppe $\sigma = (\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von $*$-Automorphismen von $M_n(\mathbb{C})$, für die Sie $\tilde{\sigma} = \sigma_{-i}$ vermuten.

(e) Zeigen Sie, dass ϕ ein KMS-Zustand ist.

(f) Schlussfolgern Sie, dass jeder treue Zustand auf einer endlich-dimensionalen C^*-Algebra ein KMS-Zustand ist.

Aufgabe 2. *Diese Aufgabe leitet die wichtigsten Aussagen der fundamentalen Tomita-Takesaki-Theorie im endlich-dimensionalen Fall her.*

Wir setzen die Aufgabe 1 fort und betrachten die GNS-Darstellung $\pi_\phi \colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(H_\phi)$ für ϕ. Hier ist also $H_\phi = M_n(\mathbb{C})$, $\langle A|B\rangle := \phi(A^*B)$ und $\pi_\phi(A)B = AB$. Wir betrachten die konjugiert-lineare Abbildung $S \colon H \to H$, $A \mapsto A^*$.

(a) Bestimmen Sie

i) das Adjungierte S^*, welches wie im linearen Fall durch die Gleichung $\langle B|S(A)\rangle = \langle S^*(B)|A\rangle$ definiert ist;

ii) das Produkt $\Delta := S^*S$, welches nun eine lineare Abbildung ist;

iii) eine konjugiert-lineare Abbildung $J \colon H \to H$ mit $S = J\Delta^{1/2}$.

(b) Zeigen Sie, dass $J^* = J$ und $J^2 = \mathrm{id}$.

(c) Berechnen Sie $J\pi_\phi(A)JB$ für $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

(d) Zeigen Sie, dass $J\pi_\phi(M_n(\mathbb{C}))J$ gleich der Kommutante $\pi_\phi(M_n(\mathbb{C}))' = \{B \in \mathcal{L}(H) : [\pi_\phi(A), B] = 0 \text{ für alle } A \in M_n(\mathbb{C})\}$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\pi_\phi(\sigma_t(A)) = \Delta^{it}\pi_\phi(A)\Delta^{-it}$ für alle $A \in M_n(\mathbb{C})$, $t \in \mathbb{R}$;

(f) Zeigen Sie, dass $J\Delta^t = \Delta^{-t}J$ und $J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$ für alle $t \in \mathbb{R}$.