Prof. Dr. J. Ebert PD Dr. T. Timmermann

Übung zur Analysis 1
Blatt 1

Abgabe bis Do, 23.10., 12 Uhr

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über n:

(a) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$ (b) $$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $q \in \mathbb{K}$ ungleich 1 und $n \in \mathbb{N}_0$. Die *n-te geometrische Summe zu q* ist dann definiert als

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

(a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

(b) Beweisen Sie die Gleichung aus (a) nochmal ohne Induktion, indem Sie $s_n + q^{n+1} = qs_n + 1$ zeigen.

(c) Berechnen Sie die Summe $t_n := \sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3. (a) Aus der Menge $\{1, \ldots, 49\}$ werden 6 verschiedene Elemente ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 6 Elemente gerade Zahlen sind?

(b) Zeigen Sie: Jede endliche Menge hat gleich viele Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen wie Teilmengen mit einer ungeraden Anzahl von Elementen. (*Hinweis:* Binomische Formel!)

Aufgabe 4. Die Menge $K = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'), \qquad (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + a'b)$$

ist ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Gleichung $x^2 = (2, 0)$ hat in K genau zwei Lösungen.

(b) Die Gleichung $x^2 = (3, 0)$ hat in K keine Lösung. (Setzen Sie dabei voraus, dass die Gleichung $x^2 = 3$ in $\mathbb{Q}$ keine Lösung hat.)

Zusatzaufgabe 5*. Zeigen Sie, dass die Menge K in Aufgabe 4 mit der vorgegebenen Addition und Multiplikation ein Körper ist.