Wend Werner Thomas Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker 1
Blatt 12

Abgabe bis Do, 22.01., 13 Uhr

Aufgabe 1 zur Bearbeitung in der Übung
Aufgaben 2-4 zur selbständigen Bearbeitung

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die Untersumme der Exponentialfunktion bezüglich der äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[a,b]$,

$$\mathfrak{Z}_n = \{t_0, \dots, t_n\} \quad \text{mit} \quad t_k = a + k\frac{b-a}{n},$$

und zeigen Sie mit Hilfe der Formel für geometrische Summen:

$$\underline{S}(\exp, \mathfrak{Z}_n) = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{e^a - e^b}{1-q_n} \quad \text{mit } q_n = e^{\frac{b-a}{n}}.$$

Lösung: Da exp monoton wächst, ist

$$\begin{aligned}\underline{S}(\exp, \mathfrak{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)} \\ &= \frac{b-a}{n} e^a \sum_{k=0}^{n-1} q_n^k \\ &= \frac{b-a}{n} e^a \frac{1-q_n^n}{1-q_n} = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{e^a - e^b}{1-q_n}.\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \frac{1}{1-q_n} = -\frac{1}{\exp'(0)} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \underline{S}(\exp, \mathfrak{Z}_n) = e^b - e^a.$$

Lösung: Setze $h_n := (b-a)/n$. Weil $\lim_{n\to 0} h_n = 0$, gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \frac{1}{1-q_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{\exp(0) - \exp(h_n)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{\exp(0) - \exp(h)} = -\frac{1}{\exp'(0)} = -1.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Sei $a > 0$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^c$ mit $c \in \mathbb{R}$, und sei

$$\mathfrak{Z}_n = \{t_0, \dots, t_n\} \text{ mit } t_k = a q_n^k \text{ und } q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Im Fall $c > 0$ gilt

$$\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \frac{q_n - 1}{q_n^{c+1} - 1}\left(b^{c+1} - a^{c+1}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \frac{b^{c+1} - a^{c+1}}{c+1}.$$

Lösung: Es gilt **(1 Punkt)**

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^c q_n^{kc} \cdot a q_n^k (q_n - 1) \\ &= (q_n - 1)a^{c+1} \cdot \frac{1 - q_n^{n(c+1)}}{1 - q_n^{c+1}} = (q_n - 1)\frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{1 - q_n^{c+1}}\end{aligned}$$

und mit Bernoulli-l'Hospital folgt, weil $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, **(1 Punkt)**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n - 1}{q_n^{c+1} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^{c+1} - 1} = \frac{1}{c+1}.$$

(b) Im Fall $c = -1$ gilt

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = n\,(q_n - 1) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \ln\frac{b}{a}.$$

(*Hinweis:* $q_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}}$, und was ist $\lim_{t\to 0} \frac{e^{t\ln\frac{b}{a}} - 1}{t}$?).
Lösung: Es gilt **(1 Punkt)**

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a q_n^k} a q_n^k (q_n - 1) = n(q_n - 1).$$

Daraus folgt **(1 Punkt)**

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{t\ln\frac{b}{a}} - 1}{t} = \ln\frac{b}{a}.$$

Aufgabe 3. (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass für die äquidistante Zerlegung $\mathfrak{Z}_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $t_k = a + k(b-a)/n$ gilt, dass

$$\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) = \frac{(f(b) - f(a))(b-a)}{n},$$

und folgern Sie, dass f Riemann-integrierbar ist.
Lösung: Die Monotonie impliziert **(1 Punkt)**

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) - \underline{S}(f, \mathfrak{Z}_n) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k)) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \end{cases}$$

eine Stammfunktion G besitzt, aber nicht Riemann-integrierbar ist. (*Hinweis:* $G(0) = 0$ und $G(x) = x^2 \cdot h(1/x^2)$ für $x \neq 0$ für eine geeignete Funktion h. Prüfen Sie, dass $G'(0) = g(0)$!)

Lösung: Der Ansatz liefert für $x \neq 0$

$$G'(x) = 2x \cdot h(1/x^2) - x^2 \cdot 2x^{-3} h'(1/x^2) = 2xh(1/x^2) - 2/xh'(1/x^2) = g(x)$$

für $h = \sin$. **(1 Punkt)** An der Stelle 0 ist

$$G'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0 = g(0),$$

weil $|\sin \frac{1}{x^2}| \leq 1$ für $x \neq 0$. **(1 Punkt)** Somit ist G eine Stammfunktion von g.

Aber g ist nicht integrierbar, weil g nicht beschränkt ist. Zwar $2x \sin \frac{1}{x^2}$ ist beschränkt, aber nicht $-\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ — für $x_n := (2n\pi)^{-1/2}$ ist $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} = \lim_{n\to\infty} 2(2n\pi)^{1/2} = \infty$. **(1 Punkt)**

Aufgabe 4. Zeigen Sie mit partieller Integration und Induktion, dass

$$\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n dx = n!(-1)^{n+1} + \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(*Hinweis:* Setzen Sie $u(x) = x$.)

Lösung: Die Formel stimmt offenbar für $n = 0$. Angenommen, sie gilt für $n-1$, dann folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} \ln^n x dx &= [x \ln^n x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \frac{1}{x} n \ln^{n-1} x dx \\ &= \mathrm{e} - n \int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x dx \\ &= \mathrm{e} - n(n-1)!(-1)^n - n\mathrm{e} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{(n-1)!}{k!} \\ &= n!(-1)^{n+1} + \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}. \end{aligned}$$

Per Induktion folgt die Behauptung.