“Logische Grundlagen der Mathematik”, WS 2014/15

Thomas Timmermann

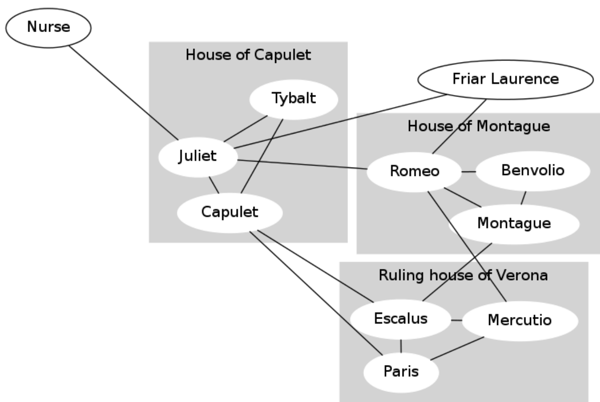
05. November 2014

3 Der steinige Weg zu den natürlichen Zahlen

Bisher kennen wir nur Mengen, die ihrerseits aus Mengen bestehen, die ihrerseits ... und so weiter, bis man stets bei der leeren Menge ankommt.
In den nächsten Vorlesungen zeigen wir, dass die Zermelo-Fraenkel-Axiome ausreichen, um die Zahlen mit ihren Rechenoperationen zu konstruieren — zuerst die natürlichen, dann die ganzen, rationalen und reellen.
Als Hilfsmittel benötigen wir dazu Abbildungen und Relationen, die Beziehungen zwischen Elementen einer oder verschiedener Mengen beschreiben.

3.1 Relationen

Wie kann man Beziehungen zwischen Elementen einer oder verschiedener Mengen mengentheoretische erfassen?



Idee Eine Art von Beziehung $\sim$ beschreibt man durch die Menge

$$\{(x, y) : x \sim y\}.$$

Zuerst zeigen wir, dass aller Paare (x, y) mit $x \in a$ und $y \in b$ für vorgegebene Mengen a, b wieder eine Menge bilden:

Lemma. *Seien a und b Mengen. Dann gibt es genau eine Menge c mit*

$$\forall a \forall b \exists c \forall z : (z \in c) \Leftrightarrow (\exists x \exists y : z = (x, y)).$$

Diese Menge c wird das *kartesische Produkt* von a und b genannt und mit $a \times b$ bezeichnet.

Beweis. Wir bilden

$$\{x\} \times b := \underbrace{\{(x, y) : y \in b\}}_{\text{ex. nach 2.7}} \text{ für jedes } x \in a$$

und dann

$$c := \bigcup \underbrace{\{\{x\} \times b : x \in a\}}_{\text{ex. nach 2.7}} = \{(x, y) : x \in a, y \in b\}. \qquad \square$$

Nun können wir Beziehungen bzw. Relationen zwischen Elementen einer Menge beschreiben. Wichtig sind dabei Äquivalenz- und Ordnungsrelationen.

Definition. *Eine* Relation auf einer Menge *a ist eine Teilmenge $R \subseteq a \times a$. Man schreibt so eine Relation R auch oft mit einem Zeichen wie $\sim$ in der Form*

$$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in R.$$

Eine Relation heißt

- Äquivalenzrelation, *falls sie*
  - reflexiv *($:\Leftrightarrow \forall x : x \sim x$),*
  - symmetrisch *($:\Leftrightarrow \forall x, y : x \sim y \to y \sim x$) und*
  - transitiv *($:\Leftrightarrow \forall x, y, z : (x \sim y \wedge y \sim z) \to x \sim z$) ist.*
- Halbordnung *oder* partielle Ordnung, *falls sie reflexiv, transitiv und*
  - antisymmetrisch *($:\Leftrightarrow \forall x, y : (x \sim y \wedge y \sim x) \to (x = y)$) ist;*
- (totale) Ordnung, *falls sie eine Halbordnung ist und zusätzlich je zwei Elemente vergleichbar sind: $\forall x, y \in a : x \sim y \vee y \sim x$.*

Beispiele

Auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert

- $m \leq n :\Leftrightarrow m$ teilt n eine Halbordnung

- $m \sim n :\Leftrightarrow n - m$ ist durch 5 teilbar — eine Äquivalenzrelation

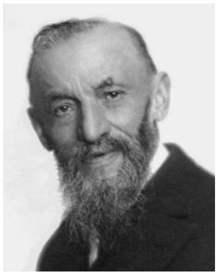
Für eine Menge a von Mengen definiert

- $x \sim y :\Leftrightarrow$ es gibt eine bijektive Abbildung $x \to y$ — eine Äquivalenzrelation
- $x \leq y :\Leftrightarrow$ es gibt eine injektive Abbildung $x \to y$ — keine Halbordnung (nicht antisymmetrisch!)
- $x \leq y :\Leftrightarrow x \in y$ — keine Halbordnung (nicht reflexiv)
- $x \leq y :\Leftrightarrow x \subseteq y$ — eine Halbordnung

3.2 Konstruktion der natürlichen Zahlen

Die wesentlichen Eigenschaften der natürlichen Zahlen wurde von Peano axiomatisch formuliert.

Die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen
Die natürlichen Zahlen sind gegeben durch



Giuseppe Peano
(1858–1932)

(i) eine Menge $\mathbb{N}$ mit

(ii) einem Element $0 \in \mathbb{N}$ und

(iii) einem Element $s(n) \in \mathbb{N}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (den *Nachfolger* von n)

so, dass folgende Axiome gelten:

(iv) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $s(n) \neq 0$

(v) (Eindeutigkeit des Vorgängers) für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $s(m) = s(n)$ gilt $m = n$

(vi) (Induktionsprinzip) für jede Menge X mit $0 \in X$ und $(n \in X) \to (s(n) \in X)$ gilt $\mathbb{N} \subseteq X$

Wie zeigt man die Existenz der natürlichen Zahlen? Wir definieren

$$0 := \emptyset \quad \text{und} \quad s(x) := x \cup \{x\} \text{ für jede Menge } x, \tag{1}$$

und erhalten die natürlichen Zahlen als 0 und deren (iterierte) Nachfolger:

$$\begin{aligned}
1 &:= s(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}, \\
2 &:= s(1) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \\
3 &:= s(2) = \cdots = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\},
\end{aligned}$$

Induktiv sieht man: für jede natürliche Zahl n ist

$$\begin{aligned} s(n) &= n \cup \{n\} \\ &= \{0, \ldots, n-1\} \cup \{\mathrm{n}\} \\ &= \{0, 1, 2, \ldots, n\} = \text{Menge der Vorgänger von } s(n) \end{aligned}$$

Nun müssen nachweisen, dass die so konstruierten natürlichen Zahlen eine Menge bilden — das folgt nicht direkt aus ZFC! Die erste Zutat ist:

2.8 Unendlichkeitsaxiom (präzise Fassung) Es gibt eine Menge a mit $\emptyset \in a$ und $\forall x : (x \in a) \to x \cup \{x\} \in a$.

Diese Menge a enthält offenbar alle natürliche Zahlen. Aus a können wir nun die natürlichen Zahlen aussondern mit Hilfe folgender Beschreibung:

Darstellung natürlicher Zahlen durch Mengen

Wie können wir natürliche Zahlen durch Mengen darstellen/"kodieren"?

Definition. *Eine Menge a heißt* natürliche Zahl, *wenn folgendes gilt:*

(N1) a ist transitiv, *d.h.* $\forall x \forall y : ((x \in y) \wedge (y \in a)) \to x \in a$

(N2) die Relation $x \leq y :\Leftrightarrow (x \in y) \vee (x = y)$ ist eine totale Ordnung auf a (Reflexivität und Antisymmetrie sind klar; wesentlich sind Transitivität und Vergleichbarkeit)

(N3) jede nichtleere Teilmenge $b \subseteq a$ hat bzgl. dieser Ordnung ein Minimum und ein Maximum, d.h. $\forall b : (b \subseteq a) \to (\exists x \exists y \forall z : (z \in b) \to ((x \leq z) \wedge (z \leq y)))$.

Bemerkung. *Betrachten wir die Relation in (N2):*

- *Reflexivität und Antisymmetrie sind klar;*
- *Vergleichbarkeit bedeutet*

$$\textit{(N4)} \quad \forall x, y \in a : (x \neq y) \to ((x \in y) \vee (y \in x))$$

- *Transitivität bedeutet $\forall x, y, z \in a : ((x \in y) \wedge (y \in z)) \to (x \in z)$.*

Darum kann man (N1) und (N2) ersetzen durch (N4) und

$$\textit{(N5)} \quad \forall x, y, z \in \underbrace{a \cup \{a\}}_{=s(a)} : ((x \in y) \wedge (y \in z)) \to (x \in z)$$