Themen dieser Woche

Metrische Räume, Konvergenz und Stetigkeit

Definition der Stetigkeit reeller Funktionen [Tafel]

Definition Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $x \in D$ genau dann, wenn

- für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$,
  (Folgenkriterium)

oder, äquivalent,

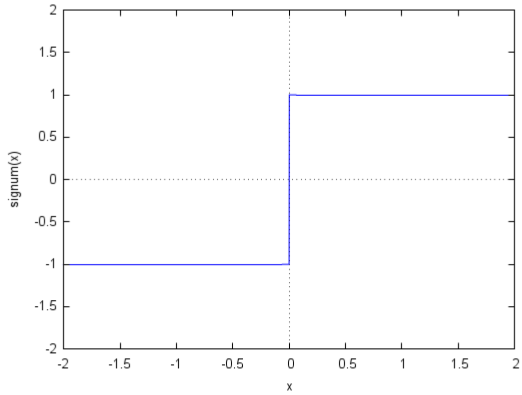
- es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt,
  sodass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| < \delta$ folgt: $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.
  (ϵ-δ-Kriterium)

Stetigkeit reeller Funktionen

Beispiel 1 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in 0.



Mögliche Begründungen

- für $x_n := \frac{1}{n}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(0)$
- für $\epsilon := \frac{1}{2}$ und *jedes* $\delta > 0$ gibt es ein $x \in (0-\delta, 0+\delta)$ mit $$f(x) \notin (f(0)-\epsilon, f(0)+\epsilon)$$

Beispiel 2 Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$

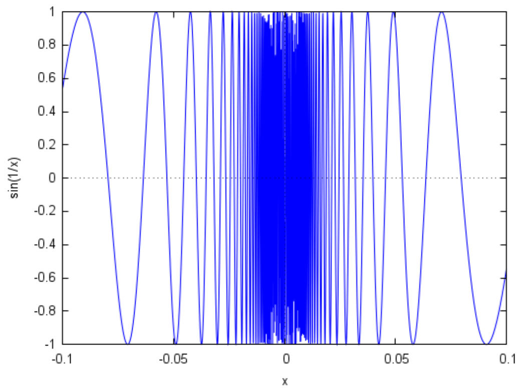
ist stetig.

Stetigkeit reeller Funktionen

Beispiel 3 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

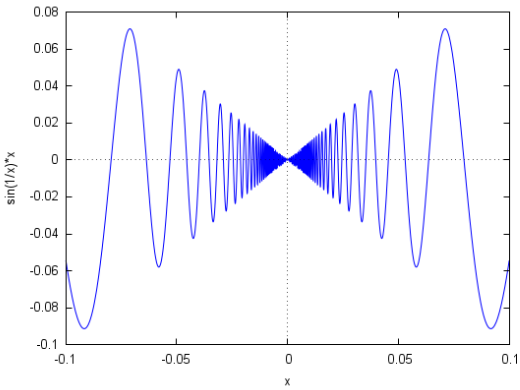
ist in 0 nicht stetig



Beispiel 4 Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist in 0 stetig



Stetigkeit reeller Funktionen

Beispiel 5 Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wir betrachten

$$f\colon \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right\} \to \mathbb{R}, \quad f\left(\tfrac{1}{m}\right) = a_m.$$

Diese Funktion ist stetig: konvergiert $(x_n)_n$ in $D(f)$ gegen ein $\frac{1}{m}$, so gilt ab einem n_0 stets $x_n = \frac{1}{m}$ und dann auch $f(x_n) = f(\frac{1}{m})$ für $n > n_0$

Beispiel 6 Sei $(a_n)_n$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten

$$g\colon \left\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right\} \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} a_m, & x = \frac{1}{m}, \\ a, & x = 0. \end{cases}.$$

Diese Funktion g ist stetig

- in jedem Punkt $\frac{1}{m}$: mit der gleichen Begründung wie oben;
- in 0: genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen [Tafel]

Definition

- Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X (von "Punkten") mit einer Abbildung $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ ("Metrik" oder "Abstand"), die folgende Bedingungen erfüllt:
  1. für alle $x, x' \in X$ gilt $d(x, x') = 0$ genau dann, wenn $x = x'$; (*Definitheit*)
  2. für alle $x, x' \in X$ gilt $d(x, x') = d(x', x)$; (*Symmetrie*)
  3. für alle $x, x', x'' \in X$ gilt $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$. (*Dreiecksungleichung*)
- Eine Folge $(x_n)_n$ in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$.
- Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt stetig in $x \in X$, falls
  - für jede Folge $(x_n)_n$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$;
  - äquivalent: für jedes $\epsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$, sodass für alle $x' \in X$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.

Normierte Räume und $\mathbb{R}^n$

Definition Eine Norm auf einem reellen/komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$, die

1. *positiv homogen* ($\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$),
2. *definit* ($\|v\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$) und
3. *subadditiv* ist ($\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$) (*Dreiecksungleichung*)

Fakt Jede Norm liefert eine Metrik durch $d(x, y) := \|x - y\|$.

Beispiele **(a)** Jedes Skalarprodukt liefert eine Norm: $\|v\| := \langle v|v\rangle^{1/2}$

(b) Auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt es viele Normen, z.B.

$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}, \quad \|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Fakt (1) Eine Folge $(x^{(k)})_k$ konvergiert in $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn jede Komponentenfolge $(x_i^{(k)})_k$ konvergiert.

(2) Eine Abbildung $f: X \to \mathbb{R}^n$ ist stetig genau dann, wenn jede Komponentenfunktion $f_i: X \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Der Raum aller stetigen Funktionen

Beispiel Der Vektorraum der stetigen Funktionen $C([a, b])$ mit

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

- Hier konvergiert eine Folge $(f_n)_n$ gegen ein f genau dann, wenn sie *gleichmäßig* (nicht nur punktweise!) gegen f konvergiert.
- Sei $f_n \in C([0, 1])$ stückw. linear mit $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1/(n+2), \\ 1, & x = 1/(n+1), \\ 0, & x \geq 1/n. \end{cases}$

  Dann konvergiert $(f_n)_n$ gegen 0 punktweise, aber nicht gleichmäßig, weil für $m \neq n$ stets $d(f_n, f_m) = 1$.

Eigenschaften von Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) [Tafel]

Definition Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

- *offen*, falls für jedes $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass für alle $x' \in X$ mit $d(x, x') < \epsilon$ gilt: $x' \in A$;
- *abgeschlossen*, falls für jede Folge $(x_n)_n$ in A gilt: konvergiert $(x_n)_n$ gegen ein $x \in X$, so folgt $x \in A$;
- *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in A gegen ein $x \in A$ konvergiert;
- *kompakt*, falls jede Folge $(x_n)_n$ in A eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ besitzt, die gegen ein $x \in A$ konvergiert.

Eigenschaften von Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d)

Beobachtung Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung offener Kugeln ist.

Satz (Bolzano-Weierstraß) Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Lemma Sei (X, d) ein metrische Raum. Dann gilt für jedes $A \subseteq X$:
A kompakt $\Rightarrow$ A vollständig $\Rightarrow$ A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ offen

Satz Der Raum $C([a, b])$ ist vollständig.

Idee Ist $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm, so auch $(f_n(x))_n$ für jedes $x \in [a, b]$, d.h. es gibt $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Zu zeigen: (i) f ist stetig; (ii) $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Wichtige Sätze über stetige Funktionen auf kompakten Mengen [Tafel]

Satz Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt $x_{\max}, x_{\min} \in K$ mit $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in K$.

Satz Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $K \subseteq X$ kompakt und $f\colon K \to Y$ stetig. Dann ist f auf K gleichmäßig stetig, das heißt, es gibt für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, x' \in K$ mit $d_X(x, x') < \delta$ gilt: $d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon$.