17. Die Wirkung der Fundamentalgruppe

Wir benutzen die zuvor gezeigten Hochhebungssätze, um aus einer Überlagerung

$$p \colon Y \to X \quad \text{mit } Y \text{ Hausdorffsch}$$

Rückschlüsse auf die Fundamentalgruppe von X zu ziehen. Sei stets Y Hausdorffsch. Setze

$$Y \underset{X}{\times} \pi_1(X) := \{(y,[w]) \in Y \times \pi_1(X) : p(y) = w(0)\} \subseteq Y \times \pi_1(X).$$

Folgerung 17.1. *Es gibt eine eindeutige Abbildung*

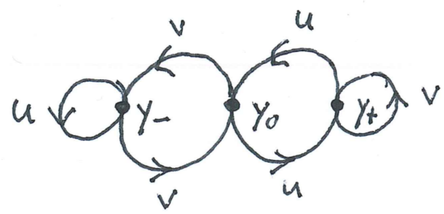
$$Y \underset{X}{\times} \pi_1(X) \to Y, \quad (y,[w]) \mapsto y * [w]$$

so, dass $y * [w] = \tilde{w}(1)$ für jede Hochhebung $\tilde{w}$ von w mit Startpunkt y. Ferner gilt

$$(y * [u]) * [w] = y * ([u] * [w]), \quad \textit{falls } p(y) = u(0),\ u(1) = w(0).$$

Beweis. Wohldefiniertheit folgt aus 16.8.
Ist $\tilde{u}$ die Hochhebung von u mit Startpunkt y und $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit Startpunkt $w(y)$, so ist $\tilde{u} * \tilde{w}$ die Hochhebung von $u * w$ mit Startpunkt y □

Beispiel 17.2. Wir betrachten die Überlagerung



der Acht $X := (S^{-1} - 1) \cup (S^1 + 1)$. Hier ist

$$y_0 * [u] * [v] = y_+ * [v] = y_+, \qquad y_0 * [v] * [u] = y_- * [u] = y_-$$

und somit $[u] * [v] \neq [v] * [u]$ in $\pi_1(X,0)$.

Wir fixieren nun ein $x \in X$ und erhalten als Einschränkung

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x) \to \pi_1^{-1}(x),\ (y,[w]) \mapsto y * [w]. \tag{5}$$

Definition 17.3. *Eine* (rechte) Wirkung *einer Gruppe G auf einer Menge F ist eine Abbildung $F \times G \to F$, $(y,g) \mapsto y \cdot g$, mit $f \cdot e = f$ und $(f \cdot g) \cdot g' = f \cdot (gg')$ für alle $g, g' \in G$ und $f \in F$.*

Folgerung 17.4. (5) *ist eine Gruppenwirkung.*

Definition 17.5. *Eine Gruppenwirkung $F \times G \to F$ heißt*

- transitiv, *falls für ein (und dann jedes) $f \in F$ die Abbildung*
$$G \to F,\ g \mapsto f \cdot g \tag{6}$$
surjektiv ist;
- frei, *falls für jedes $f \in F$ und $g \neq e$ stets $f \cdot g \neq f$ folgt, also* (6) *injektiv ist.*

Beispiel 17.6. (1) Sei $\Bbbk$ ein Körper und $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\Bbbk$. Dann ist die Abbildung
$$\Bbbk^n \times \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to \Bbbk^n, \quad ((\lambda_1\ \dots\ \lambda_n), A) \mapsto (\lambda_1\ \dots\ \lambda_n)A$$
(Multiplikation von Zeilenvektoren mit Matrizen) eine Gruppenwirkung. Diese ist weder transitiv noch frei, weil $0 \cdot A = 0$ für alle A. Die Einschränkung
$$\Bbbk^n \setminus \{0\} \times \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \to \Bbbk^n \setminus \{0\}, \quad ((\lambda_1\ \dots\ \lambda_n), A) \mapsto (\lambda_1\ \dots\ \lambda_n)A$$
ist transitiv, aber im allgemeinen nicht frei.

(2) Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und ${}_H\backslash G = \{Hg : g \in G\} \subseteq \mathcal{P}(G)$ die Menge der Rechtsnebenklassen. Dann ist die Abbildung
$${}_H\backslash G \times G \to {}_H\backslash G, (Hg, g') \mapsto Hgg',$$
eine Gruppenwirkung. Diese ist offenbar transitiv. Sie ist frei, falls $H = \{e\}$, und zum Beispiel nicht frei, falls $H \neq \{e\}$ und G kommutativ oder H in G ein Normalteiler ist, also $Hg = gH$ für alle $g \in G$.

Diese Eigenschaften einer Wirkung entsprechen gewissen Eigenschaften einer Überlagerung. Wir benötigen folgenden Begriff:

Definition 17.7. *Ein topologischer Raum X heißt* einfach zusammenhängend, *falls $\pi_1(X,x)$ für jedes $x \in X$ trivial ist.*

Satz 17.8. *Die Wirkung* (5) *ist*

(1) *transitiv, wenn Y wegzusammenhängend ist;*
(2) *frei, wenn Y einfach zusammenhängend ist.*

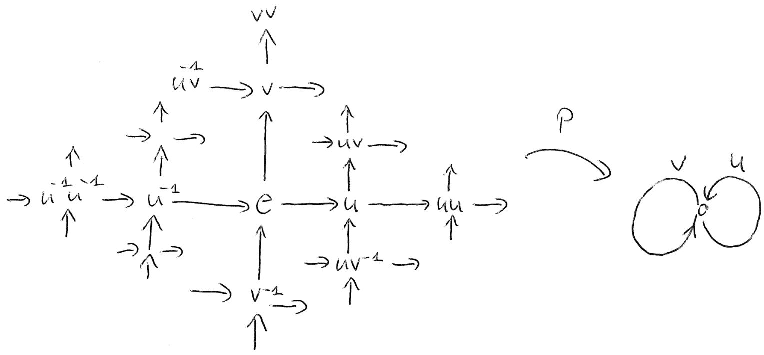
Sind beide Bedingungen erfüllt und $y_0 \in p^{-1}(x)$, so ist die Abbildung
$$\pi_1(X,x) \to p^{-1}(x),\ [w] \mapsto x * [w],$$
bijektiv.

Beweis. (1) Sind $y, y' \in p^{-1}(x)$ und $\tilde{w}$ ein Weg von y nach y', so ist $y * [p \circ \tilde{w}] = y'$.
(2) Sei $y \in p^{-1}(x)$, $[w] \in \pi_1(X,x)$ und $\tilde{w}$ die Hochhebung von w mit Startpunkt y. Falls $y * [w] = y$, also $\tilde{w}(1) = y$, so folgt nach Annahme $\tilde{w} \sim \iota_y$, also $w = p \circ \tilde{w} \sim p \circ \iota_y = \iota_x$. $\square$

Definition 17.9. *Sei X wegzusammenhängend. Wir nennen eine Überlagerung $p\colon Y \to X$* universell, *falls Y wegzusammenhängend, einfach zusammenhängend und Hausdorffsch ist.*

Beispiel 17.10. Universelle Überlagerungen sind zum Beispiel:

(1) $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$, und $p \times p\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$.
(2) die Quotientenabbildung $S^n \to \mathbb{RP}^n$ für $n \geq 2$ (müssen noch zeigen, dass S^n einfach zusammenhängend ist); insbesondere gilt für jedes $x \in \mathbb{RP}^n$ dann $|\pi_1(\mathbb{RP}^n, x)| = |q^{-1}(x)| = 2$ und folglich $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x) \cong \{-1, 1\}$ als Gruppe (mit Multiplikation).
(3) folgende Überlagerung der Acht durch einen Baum, in dem jeder Knoten 4 direkte Nachbarknoten hat:



Wir erhalten somit eine Bijektion von $\pi_1(X, x)$ mit der Menge F aller Wörter (=endlichen Folgen) der vier Symbole u, v, u^{-1}, v^{-1}, die nicht u und u^{-1} oder v und v^{-1} nebeneinander enthalten. Dabei zählen wir das leere Wort e der Länge 0 hinzu. Für alle $x_1, \ldots, x_n \in \{u, u^{-1}, v, v^{-1}\}$ ist dann

$$x_1 \cdots x_n = e * [x_1] * \cdots * [x_n]$$

und die Gruppenoperation entspricht dem Aneinanderhängen und Kürzen von Wörtern, z.B.

$$uuv^{-1}u^{-1}v \cdot v^{-1}uv^{-1}v^{-1} = uuv^{-1}\cancel{u^{-1}v \cdot v^{-1}u}v^{-1}v^{-1}.$$

Satz 17.11. *Sei X wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend, lokal einfach zusammenhängend und Hausdorffsch. Dann besitzt X eine universelle Überlagerung.*

Beweis-Idee: Schritt 1: Wähle $x_0 \in X$ und definiere

$$Y := \{[w] \in \pi_1(X) : w(0) = x_0\}, \quad p\colon Y \to X,\ [w] \mapsto w(1).$$

Schritt 2: Ist $[w] \in Y$ und $U \subseteq X$ eine wegzusammenhängende, einfach zusammenhängende Umgebung von $w(1)$, so setze

$$V_{w,U} := \{[w] * [v] : v \text{ Weg in } U \text{ mit } v(0) = w(1)\}.$$

Die Mengen $V_{w,U}$ bilden die Basis einer Topologie auf Y (ÜA).
Schritt 3: Sind w, U wie oben, so ist

$$p|_{V_{w,U}} : V_{w,U} \to U$$

bijektiv (surjektiv, weil U wegzusammenhängend ist; injektiv, weil U einfach zusammenängend ist). Man zeigt nun, dass $p|_{V_{w,U}}$ ein Homöomorphismus ist. Dann folgt, dass p eine Überlagerung ist.
Schritt 4: Y ist wegzusammenhängend: Setze $y_0 := [\iota_{x_0}]$. Sei $[w] \in Y$. Definiere für jedes $t \in [0,1]$ einen Weg $\lceil w \rceil^t$ in X durch

$$\lceil w \rceil^t(s) := \begin{cases} w(s), & s \le t, \\ w(t), & s \ge t. \end{cases}$$

Dann zeigt man: $t \mapsto [\lceil w \rceil^t]$ ist stetig (ÜA); also ein Weg in Y von $[\iota_{x_0}]$ nach $[w]$.
Schritt 5: Y ist einfach zusammenhängend: Sei $s \mapsto [u_s]$ ein Weg in Y mit $[u_0] = [\iota_{x_0}] = [u_1]$. Dann zeigt man: $(s,t) \mapsto [\lceil u_s \rceil^t]$ ist stetig (ähnlich wie in Schritt 3), also eine Homotopie zwischen dem konstanten Weg und $s \mapsto [u_s]$. $\square$