PD Dr. T. Timmermann timmermt@uni-muenster.de

# Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie
# Übungsblatt 3

**Abgabe bis Fr, 29.04., 12 Uhr**

**Aufgabe 1.** (a) Folgern Sie aus der Charakterisierung von Stetigkeit mittels Netzen: Zwei Topologien $\tau$ und $\tau'$ auf einer Menge $Z$ sind genau dann gleich, wenn für jedes Netz $(z_\lambda)_\lambda$ und jeden Punkt $z$ in $Z$ gilt:

$$z_\lambda \to z \text{ bzgl. } \tau \quad \Leftrightarrow \quad z_\lambda \to z \text{ bzgl. } \tau'.$$

(b) Folgern Sie aus (a) und Satz 3.5 (3): Sind $X$ und $Y$ topologische Räume, deren Topologien von Metriken $d_X$ bzw. $d_Y$ erzeugt wird, so wird auch die Produkt-Topologie auf $X \times Y$ von einer Metrik erzeugt.

**Aufgabe 2.** Sei $X$ das Produkt topologischer Räume $(X_i)_i$. Zeigen Sie, dass für jedes $i$ die kanonische Projektion $p_i \colon X \to X_i$ offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

**Aufgabe 3.** Sei $X$ das Produkt topologischer Räume $(X_i)_i$. Zeigen Sie, dass $X$ genau dann Hausdorffsch ist, wenn $X_i$ für jedes $i$ Hausdorffsch ist.
(*Bemerkung:* Die Implikation "$\Rightarrow$" erfordert das Auswahlaxiom.)

**Aufgabe 4.** Sei $\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\Bbbk = \mathbb{C}$. Wir betrachten den *projektiven Raum*

$$\Bbbk P^n = (\Bbbk^{n+1} \setminus \{0\})/_\sim \quad \text{mit} \quad v \sim w \;\Leftrightarrow\; \exists \alpha \in \Bbbk : \alpha v = w.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $i = 1, \dots, n+1$ ist

$$U_i := \{[v] : v \in \Bbbk^{n+1} \text{ und } v_i \neq 0\} \subseteq \Bbbk P^n$$

offen und es gilt $U_1 \cup \cdots \cup U_{n+1} = \Bbbk P^n$.

(b) Für jedes $i = 1, \dots, n+1$ ist die Abbildung

$$\iota_i \colon \Bbbk^n \to U_i, \; v \mapsto [(v_1, \dots, v_{i-1}, 1, v_i, \dots, v_n)],$$

ein Homöomorphismus. (*Hinweis:* Die Stetigkeit von Abbildungen zwischen Teilmengen von $\Bbbk^k$ und $\Bbbk^l$ können Sie wie in der Analysis 2 behandeln, also ggf. auch als offensichtlich bezeichnen.)

**Zusatzaufgabe 5.** (*Zariski-Topologie auf dem Spektrum eines kommutativen Ringes*) Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Ein *Ideal* in $R$ ist eine nicht-leere Teilmenge $I \subseteq R$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(1)\; a, b \in I \Rightarrow a + b \in I, \qquad (2)\; a \in I,\, r \in R \Rightarrow ar, ra \in I.$$

Ein Ideal $\mathfrak{p} \subsetneq R$ heißt *Primideal*, falls für alle $f, g \in R$ aus $f \notin \mathfrak{p}$ und $g \notin \mathfrak{p}$ auch $fg \notin \mathfrak{p}$ folgt. Bezeichne $\operatorname{Spec}(R)$ die Menge aller Primideale in $R$. Zeigen Sie:

(a) Alle Mengen der Form

$$U_J := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : J \not\subseteq \mathfrak{p}\} \quad (J \subseteq R \text{ ein Ideal})$$

bilden eine Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$ (genannt die *Zariski-Topologie.*)

(b) Alle Mengen der Form

$$U_f = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : f \notin \mathfrak{p}\} \quad (f \in R)$$

bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

(c) Ist $S$ ein weiterer kommutativer Ring mit Eins und $\pi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist die Abbildung

$$\pi^*\colon \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R),\ \mathfrak{p} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{p})$$

stetig bezüglich der Zariski-Topologie.